När din uppgift är att studera utseendet av en funktion och rita kurvan till den, skall du arbeta på följande sätt:

Sammanfattning:

Bestäm vilken typ av funktion.
Beräkna nollställen (om det går)
Beräkna Derivatan
Bestäm derivatans nollställen. (Ger dig x-värden för funktionens extrempunkter)
Bestäm typ av extrempunkt
Gör en värdetabell (spec. måste du beräkna y-värdet i alla extrempunkter)
Rita kurvan

Mall för hur man studerar utseendet av en funktion.

Vi antar att vi skall studera funktionen $y = 4x^2 – x^3$

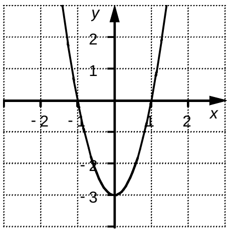
- **Bestäm vilken typ av funktion det gäller.**

Studera funktionsuttrycket. Du ser att där finns x^2-term och x^3 –term . x^3 är den som har största exponenten, som avgör vilken typ av funktion det gäller. Se också att det i det här fallet är - x^3-funktion. Lär dig följande typiska utseenden:

$+x^2$

glad

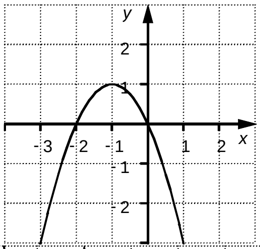
positiv



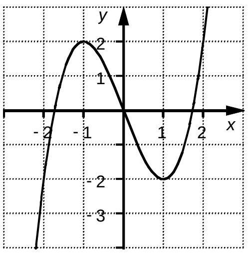
$-x^2$

ledsen

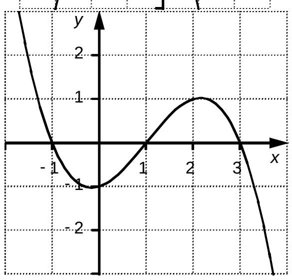
negativ



$+x^3$

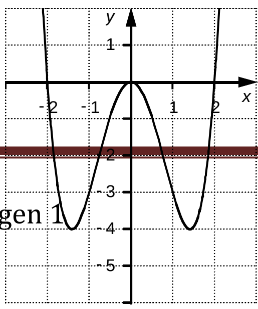


$-x^3$

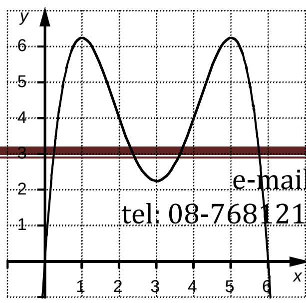


x3-kurvorna finns i fler varianter, där kurvan är mindre böjd. Man kan tänka sig att man tar tag i kurvan i båda ändarna och drar ut den så att max- och minimi-punkterna försvinner.

$+x^4$



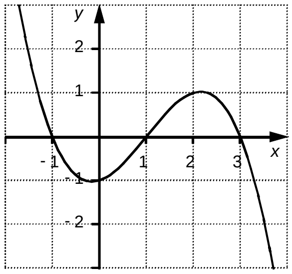
$-x^4$



Per Edblom
Sandstensvägen 1
187 34 Täby
e-mail: p.edblom@tele2.se
tel: 08-7681217, 0707-30 30 92

Om man sedan ökar gradtalet så kommer kurvan att få ytterligare en böj. Om exponenten är ett udda tal börjar kurvan längst ner till vänster och slutar uppe till höger (om t.ex + x^5) medan $+x^6$ innebär att den börjar uppe till vänster och slutar uppe till höger. Negativa motsvarigheten är precis omvänt.

Helt täckande är inte dessa exempel, men duger som en första tanke.



Du ser att för den funktion som vi skall studera så måste den se ut ungefär som följande figur eftersom den är en – x^3-kurva.

- **Bestäm funktionens nollställen**

Om möjligt (nästan alltid går det) faktorisera funktionsuttrycket.

I vårt fall $y = 4x^2 - x^3 = x^2(4 - x)$. man ser direkt att funktionen har nollstället x = 0 och x = 4. Dessutom ser man att det ena nollstället är en dubbelrot (x = 0). Vilket tyder på att kurvan inte skär x-axeln vid x =0 utan bara tangerar den. Om du ser på vår exempelkurva här ovan, så inser du att den måste ligga lite högre, så att minimipunkten tangerar x-axeln i origo och att den högra grenen av kurvan skär y-axeln vid x = 4. Du kan i princip rita en bra skiss av kurvan bara genom att ha beräknat funktionens nollställen.

- **Beräkna derivatan**

derivera funktionen vilket ger $y' = 8x - 3x^2$ = (faktorisera!) = $x(8 - 3x)$. var är derivatan noll?

$y' = 0$ ger $x_1 = 0$ och $x_2 = 8/3$

Funktionen har alltså sina extrempunkter för dessa x.

Beräkna motsvarande y-värden (funktionsvärden) x = 0 ger y =0 (visste du redan) och när x = 8/3 är $y = 256/27 \approx 9{,}48$

- **Bestäm typ av extrempunkt**

Detta kan göras på 3 sätt. Enklast är att utnyttja det man vet om utseendet av funktionen. Om du ser hur en $-x^3$-kurva ser ut ser du att sett från vänster måste min.punkten komma före max.punkten. En bra motivering skulle vara. Eftersom funktionen är en $-x^3$-funktion kommer minpunkt. före maxpunkt, dvs funktionen har en min. punkt i (0,0) och en max.punkt i

(8/3; 256/27)

Det andra sättet är att utnyttja derivatan. $y' = x(8-3x)$. Placera ut dina x på x-axeln.

		0		8/3		x
x	-	0	+		+	
8-3x	+		+	0	-	
y´	-	0	+	0	-	
y	↘		↗		↘	
		min		max		

Teckenstudiet visar att funktionen har min för x = 0 och max för x = 8/3

Tankegången för teckenstudiet ovan är så här: derivatan består av 2 faktorer. Ställ upp dem i vänsterkant i tabellen under varandra. När x < 0 vad har faktorn x för tecken? Jo -, när x > 0 har den tecknet +. Ställ dig samma fråga om faktorn (8-3x), när x<0 är den positv, dvs +, när x<8/3 är den fortfarande positiv dvs +, när x >8/3 blir den negativ dvs tecknet bli -. Jämför hur man markerar detta i tabellen.

Sedan multiplicerar man ihop tecknen och får derivatans tecken. men derivatans tecken visar hur kurvan lutar. Därav pilarna. Pilarna visar sedan kurvans allmänna utseende.

Ett alternativ är att använda grafritaren. Slå in funktionen i y = (på y1). Slå sedan i derivatans funktion som y2. Sedan kan du använda Table (2nd, Graph) för att göra teckenstudium. Sök upp derivatans nollställen i tabellen. Markera dom på en x-axel. Typ

		0		8/3		x
y'	- - -	0	+++	0	- - -	
y	↘		↗		↘	

Titta i tabellen vilka tecken derivatan har för 0 , mellan 0 och 8/3 och efter 8/3. Markera i figur!

Teckenstudiet är ganska komplicerat. Därför finns ett tredje sätt:

Andraderivatan

Om man deriverar funktionen ytterligare en gång, dvs deriverar derivatan, får man andraderivatan. Utgå från $y' = 8x - 3x^2$, då blir $y'' = 8 - 6x$

Regeln är om man tar de x-värden som du vill undersöka, i det här fallet x = 0 och x = 8/3 och sätter in i andraderivatan så gäller att om andraderivatan > 0 så är det minimum om andraderivatan är < 0 så är det ett maximum.

Per Edblom
Sandstensvägen 1
187 34 Täby
e-mail: p.edblom@tele2.se
tel: 08-7681217, 0707-30 30 92

I vårt fall y´´(0) = 8 dvs man har minimum för x = 0. y´´(8/3) = 8 – 16 = -8 < 0, dvs du har ett maximum för x = 8/3.

Om andraderivatan skulle råka bli lika med 0, så har man en terrasspunkt.

- **Regler**

y´´(a) > 0 innebär minimum för x = a

y´´(a) < 0 innebär maximum för x = a

y´´)a) = 0 innebär terrasspunkt för x = a (oftast)

En föresättning är att y´(a) = 0

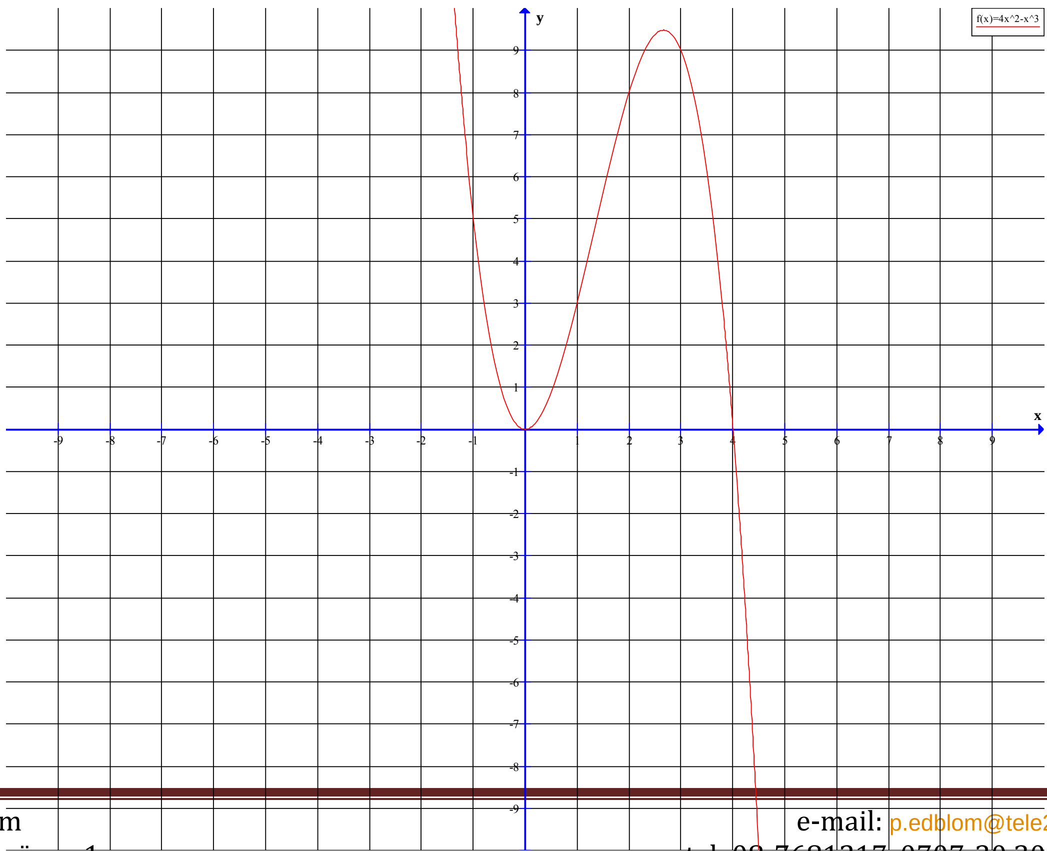
Naturligtvis skall du när du löser en sådan här uppgift använda grafritare. Dvs du skriver in funktionen genom att trycka på y =

Gå sedan till Table (2nd, Graf) och komplettera med några punkter i en värdetabell

- **Värdetabell**
- **Rita kurvan**

Du får då ungefär följande figur

:



Per Edblom
Sandstensvägen 1
187 34 Täby
e-mail: p.edblom@tele2.se
tel: 08-7681217, 0707-30 30 92