

Fullständiga lösningar fordras på alla uppgifter om inte annat sägs. Provet är ett slutprov, så allt du gör bedöms och kan påverka betyget. Försök att göra så prydliga lösningar du kan.

**Del 1. Godkänd uppgifter. 1p per rätt svar om inte annat sägs. Max 29p, G 13p**

1. I figuren är grafen till  $y = f(x)$  ritad. Besvara med hjälp av grafen.

- a. Vilken typ av funktion är det? Svar:  $-x^4$
- b.  $f(-1) = 1,25$
- c.  $f'(1) \approx 2$
- d. För vilka  $x$  är  $f(x) = 0$ ;  $x \approx \pm 2,4$
- e. För vilka  $x$  är  $f'(x) = 0$ ;  $x \approx \pm 1,7$
- f) Bestäm ett troligt funktionsuttryck för denna funktion.  $y = k \cdot x^2 \cdot (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$ ;  $f(2) = 2$   
ger  $k = -0,25$  (0/2)

2.  $2 + 2 \cdot 1,2 + 2 \cdot 1,2^2 + \dots + 2 \cdot 1,2^{10}$

a. Vad är det för slags talföljd? Geometrisk talföljd

b. Hur många termer består den av?  $N = 11$

c. Beräkna summan.  $S = 2(1,2^{11} - 1)/(1,2 - 1) \approx 64,3$  (3/0)

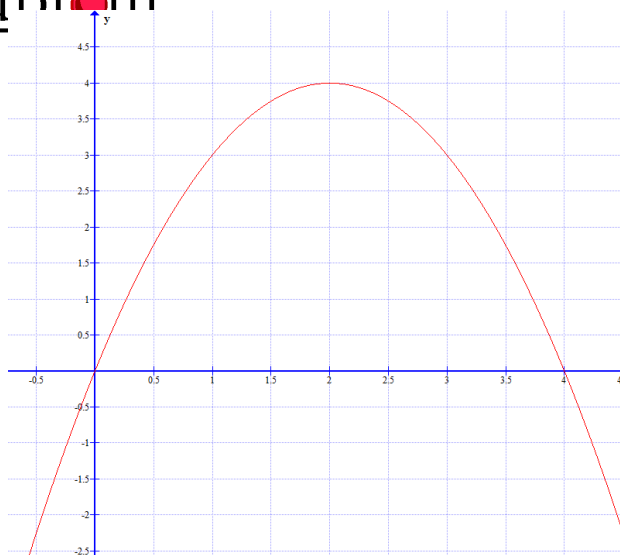
3. Derivera följande funktioner : (5/0)

a.  $f(x) = \frac{x - 3x^2}{5}$ ;  $f'(x) = (1 - 6x)/5$

b.  $f(x) = (2x - 3)(7 - x) = 14x - 2x^2 - 21 + 3x = 17x - 2x^2$  ger  $f'(x) = 17 - 4x$

c.  $f(x) = 5 e^{-0,2x}$ ;  $f'(x) = -0,2 \cdot 5 \cdot e^{-0,2x} = -e^{-0,2x}$

d. Bestäm exakta värdet av  $f'(5)$  för funktionen i uppgift c.  $f'(5) = -e^{-0,2 \cdot 5} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$



4. Figuren visar grafen till **derivatan** av  $f(x)$ , dvs  $f'(x)$ .
- Vilken typ av funktion är  $f(x)$ ?  
 $-x^3$  eftersom derivatan är  $-x^2$
  - För vilket värde på  $x$  har kurvan  $y = f(x)$  en maximipunkt?  $F'(x) = 0$  för  $x = 0$  och  $x = 4$ . Men derivatan växlar där tecken från  $+$  till  $-$ , dvs växande,  $0$ , avtagande, dvs maximum. Man ser också att när  $x = 4$  är derivatan till derivatan (dvs  $y''$ ) negativ, vilket ger max.  
(3/0)

5. Du har funktionen  $f(x) = 3x^2 - x^3 - 2$ . Bestäm med hjälp av derivatan koordinaterna för kurvans extrempunkter (max, min eller terrasspunkter). Glöm ej att motivera vilken typ av extrempunkt det gäller. (3/0)

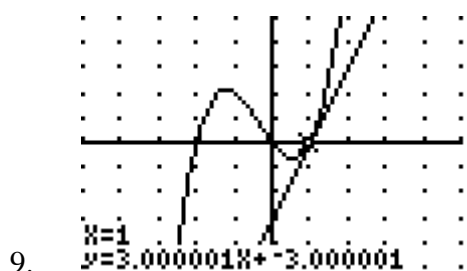
$f'(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2-x)$ , dvs  $f'(x) = 0$  för  $x = 0$  och  $x = 2$ ;  $y'' = 6 - 6x$ , dvs  $y''(0) = 6 > 0$  ger min  $y''(2) = -6 < 0$  ger maximum  $x = 0$  ger  $y = -2$  och  $x = 2$  ger  $y = 2$   
Vilket ger att kurvan har min i  $(0, -2)$  och max i  $(2, 2)$  ( $-x^3$  ger min före max)

6. Undersök samma kurva och bestäm funktionens största och minsta värde i intervallet  $-1 \leq x \leq 2$ ; Undersök funktionens värde i intervallets ändpunkter.  
 $f(-1) = 2$  och  $f(2) = -2$ , dvs funktionens minsta värde är  $-2$  när  $x = 0$  och största värde  $= 2$ , när  $x = -1$  eller  $x = 2$  (3/0)

7. Funktionen  $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + x + 1$  är given. Bestäm  $f'(-1)$ . (2/0)

$f'(x) = x^3 - 4x + 1$   $x = -1$  ger  $f'(-1) = (-1)^3 - 4(-1) + 1 = 4$

8. Bestäm ekvationen för en tangent till kurvan  $y = x^3 + x^2 - 2x$  i den punkt där  $x = 1$ .  $y' = 3x^2 + 2x - 2$ ;  $x = 1$  ger  $k = y'(1) = 3 + 2 - 2 = 3$ ;  $x = 1$  ger  $y = 1 + 1 - 2 = 0$ ; Problemet är alltså att man har en tangent med  $k = 3$  som går genom punkten  $(1; 0)$ ; dvs  $y = 3x + m$   $(1; 0)$  ger  $0 = 3 + m$  dvs  $m = -3$   
Svar  $y = 3x - 3$ ; Vilket grafräknaren bekräftar: (3/0)



**Del 2. VG/MVG-frågor Max. 25p VG totalt 21p, MVG 30p.**

10. Du skall studera funktionen  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$
- Bestäm med hjälp av grafräknaren funktionens nollställen. Svara med 1 decimal. (0/3)
  - Bestäm med hjälp av derivata ev. extrempunkter till funktionen (0/3)
  - Rita kurvan. (0/2)
11. Bestäm eventuella max-, min- och terrasspunkter och rita sedan grafen till funktionen  $f(x) = 0,5x + \frac{2}{x}$  i intervallet  $x > 0$  (0/3)
12. Bestäm med hjälp av grafitare funktionens största och minsta värde.  $f(x) = 0,5x^3 - 4,5x^2 + 12x - 6$  i intervallet  $0,5 \leq x \leq 4,5$  (0/3)
13. En bakteriekultur växer enligt funktionen  $N(t) = 1000 \cdot e^{0,05t}$ , där N är antalet bakterier t minuter efter experimentets början.
- Hur många bakterier fanns i kulturen från början? (1/0)
  - Hur många bakterier fanns det efter 2 timmar (0/2)
  - Hur stor är tillväxthastigheten efter 2 timmar? (0/2)
  - Antalet bakterier växer med en tillväxtfaktor, som beskriver hur många % antalet ökar/min. Hur stort är det procenttalet? (0/2)
14. De båda funktionerna visar grafen till funktionen  $y = 8 - \frac{x^2}{2}$ . P är en rörlig punkt på grafen. Skriv ett funktions uttryck för  $A_1$  resp.  $A_2$  och bestäm koordinaterna för P då figurenas area blir så stor som möjligt. ( 2 olika punkter) (0/4)



**Lycka till med provet !**

**God Jul !**

